質点の運動学

実際の物体は大きさを持っている。しかし、回転運動を考慮せず、物体の重心での運動の軌跡だけが分かればよい時には物体の大きさを無視することができる。運動の軌跡を知るために考慮する物体の一点を「質点」という。それに対して物体の回転運動を含めた運動を表す場合には、「剛体」という表現が用いられ、質点の集合として扱われる。

物体の運動は、物体に対して力が働き、加速度、速度が発生して、物体の位置が時間的に変わることで表される。「質点の運動学」は、物体に力が働く段階を考慮せず、質点の運動を加速度、速度、位置、時間を考慮することで、どのような数式で表すことができるかを示す。今回は「等速直線運動」、「等加速度直線運動」および「等速円運動」について学び、アニメーションを作成する。

1. 直線運動

1.1 等速運動

物体の運動とは物体の位置（position）が時間的に変化することを言う。x 軸方向に一定の速さ（speed）v で移動している時、時刻 t における位置は以下の式で表すことができる。

$$x = x_0 + vt \qquad (1.1)$$

x_0 は $t = 0$ の時の位置である。この式は等速直線運動（uniform linear motion）を表す。

この式は 1 次元の運動を表すため、速さ v はスカラー（scalar）である。これに対して、2 次元や 3 次元での運動の場合にはベクトル（vector）で表され、これを速度（velocity）という。

実際の物体の運動では、時刻によって速度がめまぐるしく変化する。時刻 t、および $t + \Delta t$ における位置をそれぞれ x、$x + \Delta x$ とすると、時間 Δt の間に移動する質点の距離 Δx は以下の式で表すことができる。

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \qquad (1.2)$$

この Δx を変位（displacement）という。速度は変位を時間 Δt で割った量で表される。

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (1.3)$$

この速度は平均速度であり、式（1.3）は差分（difference）とも呼ばれる。この差分の式において、Δt を無限小として得られる値は、ある時刻 t での瞬間速度を表す。また、この考え方は数学の微分（differential）の定義そのものであり、微分の式は以下となる。

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad (1.4)$$

コンピュータ上では、Δt を十分小さな値で近似し、微分を差分で計算する。この Δt を時間刻み（time step）、あるいは微小時間という。

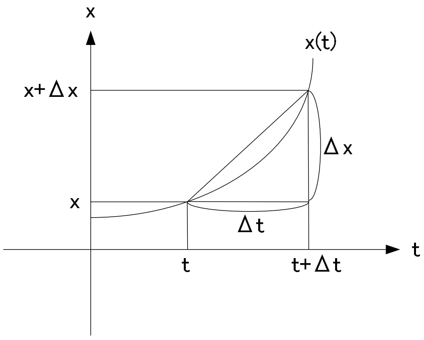

図 1.1　速度の定義

1.2　等加速度運動

前節では、平均速度と瞬間速度というものがあることを示した。例えば、自動車を使って道路を時速60km で走り続けたいとする。しかし、信号で停止したり、渋滞に巻き込まれたりすると、そのとき、そのときの時速は 0km になったり、40km になったりする。これが瞬間速度である。では、出発から到着までの時間が 3 時間かかったとして、その間の走行距離は 135km だとすると、135km/3 時間=時速 45km となり、これが平均速度となる。

図 1.2 のように速度が時刻で変化する場合の移動距離を求めることを考える。その場合、時間軸を時間 Δt で区切り、その区間の速度は一定であると仮定する。それぞれの区間の速度 $v(t)$ と時間 Δt の積はその区間の移動距離である変位 Δx となる。時刻 t_1 、t_2 の時の位置をそれぞれ x_1 、x_2 とすると t_1 、t_2 間の移動距離は変位 Δx の和で表すことができるため、以下の式で表すことができる。

$$x_2 - x_1 = \sum \Delta x = \sum v(t)\Delta t \qquad (1.5)$$

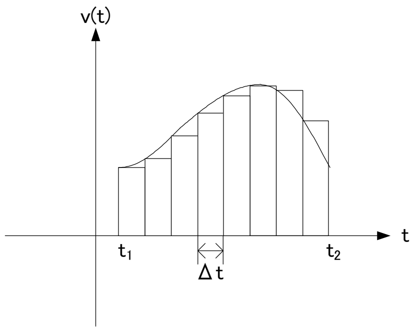

図 1.2　速度が一定でない場合の移動距離の求め方

これは図 1.2 における長方形の面積の和を求めることに等しいため、Δt の大きさに応じて、誤差が生じることになる。

ここで、(1.5)式において Δx 、Δt を無限小として dx 、dt で表し、総和記号 Σ を積分記号 $\int$ で置き換えると以下のように、積分（integral）の式となる。

$$x_2 - x_1 = \int dx = \int v(t)dt \tag{1.6}$$

　この式は式(1.4)の両辺を t で積分したものになる。(1.6)式において、速度が一定であると仮定すると、

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = v\int_{t_1}^{t_2} dt$$

となり、

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) \tag{1.7}$$

となる。ここで、x_2、x_1、t_2、t_1 について、現在位置 x、初期位置 x_0、経過時間 t、開始時間 0 と置き換えると式(1.1)となる。

　次に物体の運動に対して加速度を考慮する場合について示す。物体の運動は加速・減速によって速度が変化する。この速度の時間的変化の割合が加速度（acceleration）である。すなわち、加速度は $a(t)$ は以下で表される。

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \tag{1.8}$$

この式の積分形式は

$$\int dv = \int a(t)dt \tag{1.9}$$

である。加速度が一定値 a の場合、初速度 v_0 とすると (1.9)式の解は以下となる。

$$v = v_0 + at \tag{1.10}$$

この式を(1.6)式に代入すると以下となる。

$$\int dx = \int (v_0 + at)dt \tag{1.11}$$

積分範囲を以下のように与えたとすると、

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)dt$$

この積分の解は

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (1.12)$$

となる。これは等加速度運動（uniformly accelerated motion）の式である。

2. 等速円運動

ここでは等速円運動（uniform circular motion）について述べていく。質点が xy 平面上において原点 O を中心に半径 r の円周上を一定の速さ v で運動している場合を考える。角度（angle）の単位として弧度（ラジアン、記号 rad、$360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$）を用いる。中心角 $\theta\,\mathrm{rad}$ の弧の長さ s は以下で表せる。

$$s = r\theta \qquad (2.1)$$

この式に $\theta = 2\pi$ を代入すると、$s = 2\pi r$ となり、よく見なれた円周の長さの公式になるので直感的に理解しやすいと思う。ここで、以降の説明では反時計回りを正の回転方向とする。

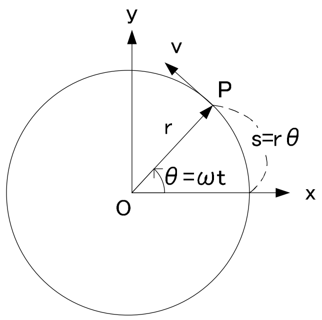

図 2.3　xy 平面上の等速円運動：位置ベクトル r と速度ベクトル v の大きさは一定であるが、方向は時刻で変化する。

角度 θ が時間 Δt の間に $\Delta\theta$ 増加したとき、以下の式で表される ω は角速度（angular velocity）と呼ばれる。

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

また、瞬間の角速度については以下の微分形式で表される。

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.3)$$

角速度が一定であるとすると(2.3)式の積分形式は以下の式で表され、

$$\omega\int_0^t dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

その解は

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{2.4}$$

となる。ただし、θ_0 は $t = 0$ のときの角度である。

質点 P が半径 r の円周上を移動するとき、その速度は(2.1)、(2.3)式から以下で表される。

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega(t) \tag{2.5}$$

角速度が一定であるならば円周上の速さも一定となる。これを等速円運動という。

等速円運動でない場合では角速度が時刻で変化する。角速度の時間的変化の割合を角加速度（angular acceleration）という。

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.6}$$

角速度の単位は rad/s 、角加速度の単位は rad/s^2 である。あるいは (2.1)式を変形すると $\theta = s/r$ となり、s と r が同じ次元であるため、θ が無次元になることを踏まえ、rad を省略することで角速度の単位を $1/s$ 、角加速度の単位を $1/s^2$ と表す場合もある。

また、原点を中心に等速円運動する質点 P の座標は以下で表される。

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\omega t \\ y &= r\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

等速円運動の速度を $v = (v_x, v_y)$ とするならば、(2.7)式を時間で微分したものが速度となる。

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -r\omega\sin\omega t \\ v_y &= \ \ r\omega\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

また、加速度 $a = (a_x, a_y)$ は速度を時間で微分したものとなるので、

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -r\omega^2 \cos\omega t \\ a_y &= -r\omega^2 \sin\omega t \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

あるいは、(2.7)式を用いて、

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 x \\ a_y &= -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

と表すこともできる。

3. オイラー法

物体の運動を表す運動方程式が単純な場合、式(1.1)や式(1.12)を解くことで厳密解を求めることができるため、任意の時間の位置座標を計算で正確に求めることができる。厳密解が得られないときや求められても非常に複雑な場合は数値積分によって近似的に求める。

数値積分では時間Δtの間、速度、加速度は一定であると仮定する。数値積分の代表的な手法であるオイラー法（Euler method）では速度Δvを加速度aと時間Δtの積として、

$$\Delta v = a\Delta t$$

で表し、変位Δxを速度vと時間Δtの積として、

$$\Delta x = v\Delta t$$

で表す。例えば図 3.1 に表すように、時刻t_nのときの速度v_nが与えられ、時刻$t_{n+1} = t_n + \Delta t$のときの速度v_{n+1}は、

$$v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t \quad (3.1)$$

として表す。a_nは時刻t_nにおける加速度である。

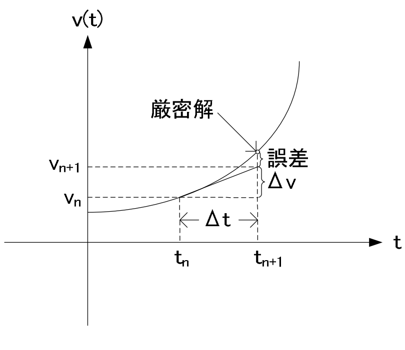

図 3.1　オイラー法：時刻$t = t_n$のときの加速度を
$a_n = \Delta v / \Delta t$で近似する

時刻 t_{n+1} のときの速度 v_{n+1} が求められたので、同様にして位置座標 x_{n+1} が求めることができる。この際に用いる速度は v_n ではなく、更新された速度である v_{n+1} であることに注意すること。

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\Delta t \qquad (3.2)$$

図 3.1 の通り、Δt が大きくなるほど、誤差は大きくなる。逆に Δt を小さくしすぎると計算時間が増え、リアルタイムで処理することができなくなる。適当な刻み幅で計算精度を上げる方法としては改良オイラー法やルンゲ・クッタ法などがあるが、オイラー法に比べ、計算量は多い。

<u>演習用プログラムのダウンロード</u>

竹下研究室「http://akita-nct.jp/take/」にアクセスする。「講義ノート」→「H21 年度　コンピュータシミュレーション (5E)」→「演習用プログラム」から演習用プログラムをダウンロードする。window 用（VisualStudio2008、zip 形式）を用意してある。

演習

(1) 式(1.1)を元にして、厳密解による等速直線運動のアニメーションを作成する。
(2) 式(1.12)を元にして、厳密解による等加速度直線運動のアニメーションを作成する。
(3) 式(2.7)を元にして、厳密解による等速円運動のアニメーションを作成する。
(4) オイラー法を用いた等速直線運動のアニメーションを作成する。
(5) オイラー法を用いた等加速度直線運動のアニメーションを作成する。

演習方法

simulation.c 内の関数 dynamics( )の内容を変更する。

ダウンロードしたプログラムは C 言語と OpenGL で作成している。初期状態では球と平面を表示する。この球を描画する際の球の中心の座標値を変更することでアニメーションを行う。

simulation.h 内にはいくつかの構造体を定義してある。主な構造体とその用途は以下である。

SimulationPrameter	シミュレーション空間や時間などのパラメータ用
Particle3D	質点のシミュレーション用

球の中心座標値を変更するには Particle3D　sphere1 ; でグローバル変数の宣言を行った構造体のメンバ position を変更する。また、シミュレーション時刻は SimulationPrameter　sparam;でグローバル変数の宣言を行った構造体のメンバ time に格納してある。よって、例えば、以下のように記述し、実行すると y 軸方向に振動する球が表示される。

```
void dynamics(void)
{
	sphere1.position.x = 0.0;
	sphere1.position.y = 6.0+5*sin(2*M_PI*sparam.time);
	sphere1.position.z = 0.0;
```

```
}
```

また、オイラー法でシミュレーションを行う場合に使う加速度、速度については Particle3D のメンバとしてそれぞれ acceleration、velocity として宣言し、時間間隔Δt については SimulationPrameter のメンバとして delta_t として宣言してあるのでこれらの変数を用いる。また、これらの変数の初期値はファイル simple.spf 内に記述し、読み込む仕様にしてある。また、次回に以降に向けて角加速度や角速度といったものもこちらで定義しておいた。

補足：解についての分類

・結果に対しての分類

（１）厳密解：厳密に値を定めることができる解

（２）近似解：誤差を含む解

・手法に対しての分類

（１）解析解：主に方程式を数学的に解いて求めた場合であり、結果は厳密解となる。また、数値解析（数値計算）を使って求めた場合を指す場合もあり、結果は近似解となる。

（２）数値解：数値解析（数値計算）を使って求めた場合を指し、結果は近似解となる。

参考文献

この文章は以下の文献を参考にしました。

1. OpenGL で作る力学アニメーション入門　酒井幸市 著　森北出版株式会社：第 2 章

2. http://202.250.123.44/default.html　物理教育　徐丙鉄（近畿大学工学部・情報システム工学科）：振動論入門の項目が参考となった。Java を使ったアニメーションもある。