抵抗力・回転運動

前回までのところは物体を「質点」として表し、運動方程式を解いた。今回は大きさを持った物体である「剛体」として扱う。剛体は質点の集まりであり、物体内部ではその質点の相対的な位置が変わらないものとして扱う。実際の物体では力が加わると物体の変形が伴うため、厳密な意味での剛体は存在しない。しかし、物体を剛体とみなして扱うと、床面で「摩擦」を受けながら移動する場合や「回転運動」を簡潔に表すことができる。

今回は抵抗力における「摩擦力」、および「回転運動」について学ぶ。

1. 摩擦力

床に接している物体を動かす際には底面に摩擦力（frictional force）が発生する。静止している物体を動かすには大きめの力が必要となるし、動いている物体は徐々に速度を落としていく。これらの現象は物体が移動しようとする方向と反対向きに摩擦力が働くために起きる。

1.1 垂直抗力

地上の物体には重力が働き、下向きの力が作用している。地面や床面に物体が静止している場合、重力に対する反作用として、垂直抗力（normal force）が上向きの力が発生する。重力を W とすると、垂直抗力 N は以下の式で表される。

$$\mathbf{N} = -\mathbf{W} = -m\mathbf{g} \tag{1.1}$$

1.2 静止摩擦

水平な床面に物体があり、これを水平方向に力 f で押す場合を考える。力が小さい場合には物体は動かない。これは力 f に対して、床面から受ける摩擦力によって打ち消されるためである。この場合に働く摩擦力を静止摩擦力（static friction）という。外力 f と静止摩擦力 F の間には以下の関係がある。

$$\mathbf{F} = -\mathbf{f} \tag{1.2}$$

外力 f が一定の値を超えた場合、物体は動き始める。この動き始める直前の静止摩擦力の大きさを最大摩擦力 $F_{\max}$ といい、垂直抗力 N の大きさに比例することが実験で確かめられている。

$$F_{\max} = \mu_s N \tag{1.3}$$

μ_s は静止摩擦係数（coefficient of static friction）である。μ_s は物体と床面の材質と表面状態で決まり、接触面の面積にはほとんど依存しない。通常の場合、静止摩擦係数は 1 以下である。

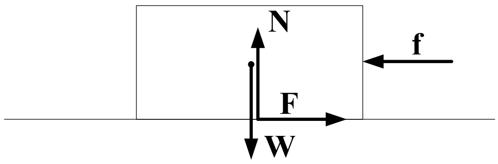

図１　水平面と直方体の間に働く摩擦力

1.3 動摩擦

物体が静止している場合に働く摩擦力は静止摩擦力であるが、物体が運動している場合には動摩擦力（dynamic friction）、または運動摩擦力（kinetic friction）に切り替わる。動摩擦力は以下の式で表される。

$$F = \mu_k N \tag{1.4}$$

μ_k は動摩擦係数（coefficient of dynamic friction）である。この値も物体と床面の材質と表面状態で決まり、接触面の面積にはほとんど依存しない。また、物体の速度にも大きく依存しない。静止摩擦力と動摩擦力違いは摩擦係数の値である。滑っている物体の方が、摩擦力が小さい。

$$\mu_s > \mu_k \tag{1.5}$$

1.4 斜面上の物体

ここまでは地面に水平な床面を例にとって説明してきたが、斜面上の物体についても摩擦力は働く。水平面との成す角を θ とした斜面上に質量 m の直方体が乗っている場合を考える。

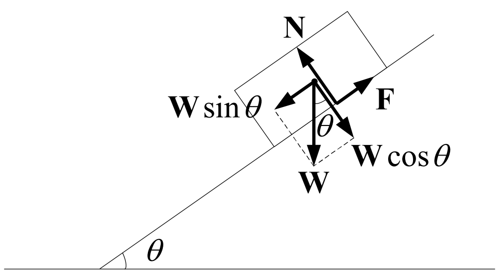

図２　斜面と直方体の間に働く摩擦力

この直方体には $W = mg$ の重力が働く。重力 W は斜面に平行な方向の成分 $W\sin\theta$ と垂直な方向の成分 $W\cos\theta$ で分解される。物体が静止している状態を考えると、垂直抗力 N の大きさは以下で表される。

$$N = W\cos\theta \tag{1.6}$$

また、静止摩擦力Fの大きさは以下となる。

$$F = W\sin\theta \tag{1.7}$$

直方体は滑り落ち始める直前の斜面の角度θ_cとする。この場合、重力の斜面に平行な方向の成分$W\sin\theta_c$は最大摩擦力$F_{\max} = \mu_s N$と等しくなるので以下の式で表される。

$$W\sin\theta_c = \mu_s N \tag{1.8}$$

また、(1.6) 式を代入すると、

$$W\sin\theta_c = \mu_s W\cos\theta_c \tag{1.9}$$

となる。角度θ_cについて解くと以下の式になる。

$$\theta_c = \tan^{-1}\mu_s \tag{1.10}$$

物体が滑り始めると摩擦力は動摩擦力に変わり、物体に作用する斜面に平行な方向の力（合力）fは以下の式で表すことができる。

$$f = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \tag{1.11}$$

よって、加速度は以下となる。

$$a = \frac{f}{m} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \tag{1.12}$$

2. 回転運動

これまでに扱った質点に関する運動力学や前節で紹介した摩擦力による運動は物体の重心位置の移動であり、「並進運動」という表現が用いられる。これは等速円運動についても同様であり、この場合は重心が円軌道で並進運動しているとみなせる。今回は物体の姿勢の変化である「回転運動」について学んでいく。

2.1 運動エネルギーと慣性モーメント

速度vで並進運動している物体は以下の式で表される運動エネルギー（kinetic energy）を持っている。

$$K_t = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1}$$

剛体は質点の集合で表され、剛体内部の質点の相対的な位置は変わらない。この剛体の回転運動を考えると図３のようになり、全ての質点は同じ角速度ωによって回転する。

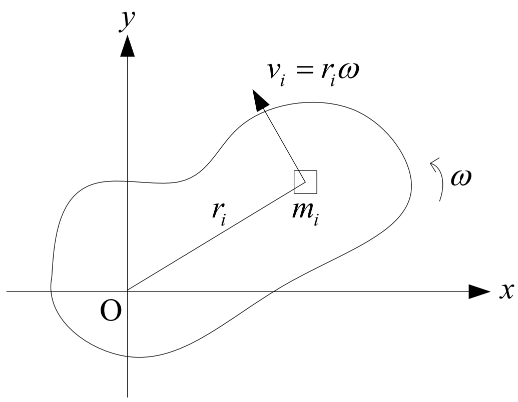

図３　剛体の回転運動

回転軸Oから質点までの距離をr_iとすると、質点はr_iに直交する方向に速度$v_i = r_i\omega$を持つ。つまり、質点は回転運動により、円軌道を描くのでこの速度v_iは接線方向になる。質点の質量をm_iとするとその運動エネルギーは以下の式で表される。

$$K_i = \frac{1}{2}m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}m_i {r_i}^2\omega^2 \tag{2.2}$$

剛体全体の回転運動による運動エネルギーは以下で表される。

$$K_r = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i {r_i}^2\right)\omega^2 \tag{2.3}$$

ここで、

$$I = \sum_i m_i {r_i}^2 \tag{2.4}$$

とおくと、(2.3)式は以下で表される。

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{2.5}$$

(2. 4)式のIは慣性モーメント（moment of inertia）と呼ばれる。質点の運動エネルギーを表す(2.1)

式と比較すると、I は並進運動における質量に相当する。

2.2 回転運動の運動方程式

図４は半径 r の円軌道上を速度 v で移動する質量 m の質点の様子を表す。

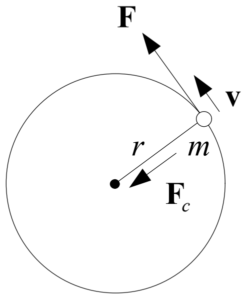

図４　回転運動する質点

向心力 $\mathbf{F}_c$ だけが存在する場合には接線方向の速度は一定であり、等速円運動を行う。この質点に外力 $\mathbf{F}$ が働いた場合、速度が変化する。

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{2.6}$$

両辺に r を乗じ、$v = r\omega$ を用いて整理すると以下の式となる。

$$rF = mr^2\frac{d\omega}{dt} \tag{2.7}$$

mr^2 は質点が１個の場合の慣性モーメント I である。剛体の場合には慣性モーメントの総和となるため、左辺を M と置くと以下の式で表すことができる。

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{2.8}$$

α は角加速度である。また、回転の勢いを示す角運動量（angular momentum）H は以下の式で表すことができる。

$$H = I\omega \tag{2.9}$$

回転運動の運動方程式は角運動量 H を用いて、以下で表すことができる。

$$M = \frac{dH}{dt} \tag{2.10}$$

剛体の形状や質量が一定の場合、慣性モーメント I は変化しないため、(2.10)式は(2.8)式に一致する。

(2.7)式では $M = rF$ として置き換えたが、この M は物体を回転させようとする力を表しており、これを力のモーメント（moment of force）あるいはトルク（torque）という。これは以下の図に表されるように、回転中心から外力の作用線までの距離 r と外力 F の積である。

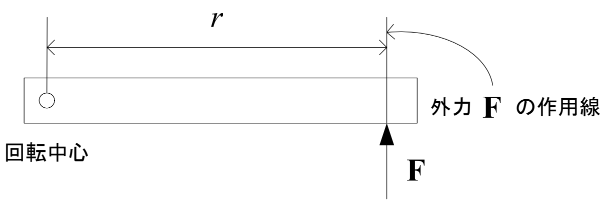

図５　力のモーメント（トルク）

距離ベクトル $\mathbf{r}$ と外力ベクトル $\mathbf{F}$ が直交していない場合、ベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{F}$ の成す角を φ とすると、力のモーメントの大きさ M は以下の式で表すことができる。

$$M = rF\sin\varphi \tag{2.11}$$

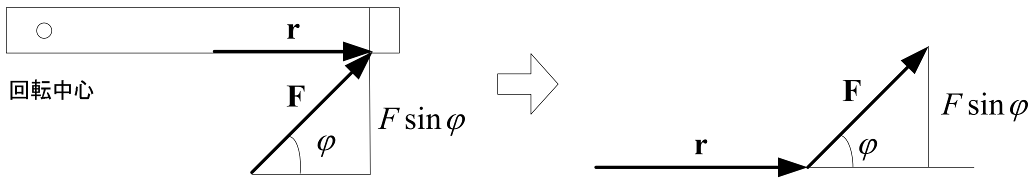

図６　$\mathbf{r}$ と $\mathbf{F}$ が直交していない場合の力のモーメント

ベクトルで表すと以下となり、図７に表すように、これはベクトルの外積となるため、力のモーメントの方向はベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{F}$ が作る平面に直交し、そのベクトルの方向は $\mathbf{r}$ から $\mathbf{F}$ へ回転させた時に右ねじの進む方向である。

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.12}$$

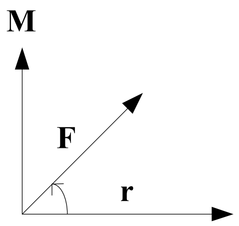

図７　力のモーメントの方向

力のモーメント M を表す(2.8)式において、ベクトル $\mathbf{M}$ での表現に置き換えることを考える。その場合、角速度 ω をベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で、角加速度 α をベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ で置き換え、慣性モーメント I についてはテン

ソル$\mathbf{I}$で置き換える。

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{2.13}$$

この式を各成分で表すと以下の表現となる。

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

現実の運動では角加速度$\boldsymbol{\alpha}$の方向と力のモーメント$\mathbf{M}$の方向は異なるため、その挙動は複雑となる。対角成分I_{xx}、I_{yy}、I_{zz}は慣性モーメントと呼ばれ、その他の成分は慣性積と呼ばれる。例として球の慣性モーメントを以下に示す（詳細は教科書 5.3 節）。

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mR^5 \tag{2.15}$$

2.3 転がり運動の運動方程式

図８は水平面上をx軸方向へ転がる半径Rの球または円柱の転がり運動（rolling motion）を表している。転がりながら重心は直線運動を行う。黒矢印は回転の運動方向だけを示し、白矢印は直線の運動方向だけを示す。直線運動の速度vと回転運動の角速度ωの大きさによって運動は次のように分類できる。

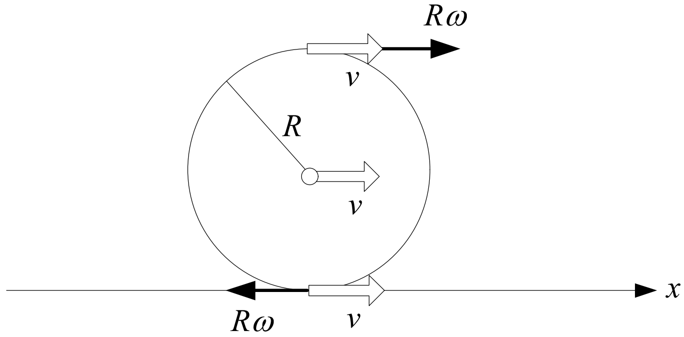

図８　水平面上を転がる球（接触点での速度$v_p = v - R\omega = 0$の場合）

2.3.1　$v = R\omega$の場合

この場合、剛体は滑らずに転がる。図８に示したベクトルvや$R\omega$は全て同じ大きさとなるため、重心位置では速度v、最上点では速度$2v$となるが、平面との接触点では並進運動の速度vと回転運動の速度$R\omega$が逆向きとなるため、0 となる。実際の物体の場合には小さい値ではあるが転がり摩擦や空気抵

抗によって、いずれ球は停止する。

2.3.2 $v > R\omega$ の場合

この場合、剛体は滑りながら転がる。接触点での速度 $v_p = v - R\omega > 0$ は x 軸方向で正の向きを取る。滑りながら移動する状態であるので、図９に示すように剛体には動摩擦力が発生する。

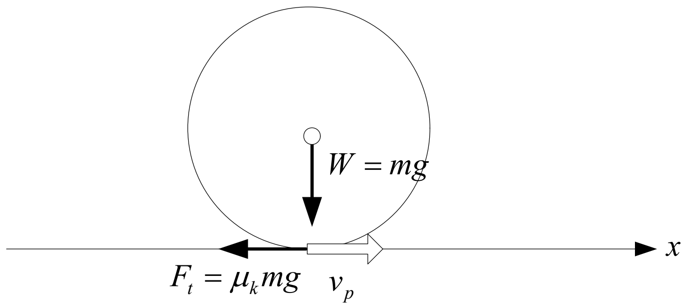

図９　水平面上を転がる球（接触点での速度 $v_p = v - R\omega > 0$ の場合）

このときの動摩擦力は $F_t = \mu_k mg$ が x 軸方向で負の向きに作用することになり、並進速度は小さくなり、逆に回転速度は大きくなると考えられる。運動方程式は以下で表される。

並進運動：$m\dfrac{dv}{dt} = -\mu_k mg$　(2.16)

回転運動：$I\dfrac{d\omega}{dt} = R\mu_k mg$　(2.17)

球の慣性モーメントは(2.15)式から $I = (2/5)mR^5$ であるので、加速度 a、角加速度 α は以下となる。

$$a = -\mu_k g \tag{2.18}$$

$$\alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R} \tag{2.19}$$

並進速度は(2.18)に従って小さくなり、回転速度は(2.19)に従って大きくなるため、いずれは $v = R\omega$ になる。その後の運動は「2.3.1　$v = R\omega$ の場合」に示すとおりである。

2.3.3 $v < R\omega$ の場合

接触点での速度 $v_p = v - R\omega < 0$ は x 軸方向で負の向きを取る。前項と反対方向となるため、動摩擦力は正の方向をとる。この場合、並進速度は大きくなり、回転速度は小さくなると考えられる。運動方程式は以下で表される。

並進運動：$m\dfrac{dv}{dt} = \mu_k mg$　(2.20)

回転運動：$I\dfrac{d\omega}{dt}=-R\mu_k mg$ (2.21)

この場合にも並進速度は(2.20)に従って大きくなり、回転速度は(2.21)に従って大きくなるため、いずれは$v=R\omega$になる。その後の運動は「2.3.1 $v=R\omega$の場合」に示すとおりである。

参考文献

この文章は以下の文献、ウェブサイトを参考にした。

1. OpenGLで作る力学アニメーション入門　酒井幸市 著　森北出版株式会社：第４章、第５章
2. http://202.250.123.44/default.html　物理教育　徐丙鉄（近畿大学工学部・情報システム工学科）：振動論入門の項目が参考となった。Javaを使ったアニメーションもある。