波動シミュレーション

一般的に何かが特定の方向に行ったり来たりして周期的な変化を行う運動をするとき、この現象を振動という。振動とは時間的に見たときの揺れ動きであるであるが、振動が周囲に伝わることで空間的な広がりを持つ場合、この現象を波あるいは波動という。例えば、水面に小石を落とした時、そこを中心として波紋が広がっていく現象がこれにあたる。水面に浮かぶ木の葉はほぼ上下に揺れ動くだけで水そのものは波と共に移動しているわけではなく、ただ周囲の振動を伝えているだけである。また、水のように波動を伝えている物質を媒質といい、小石を落とした点のように最初に振動を起こした点を波源という。

日常的に見ることが出来る波動はバネー質点系モデル（教科書 7 章参照）でシミュレーションすることができるが、数値的に不安定であるため、時間刻みを十分に小さくすることができず、10×10 程度の質点数でもリアルタイムに実現することは難しい。

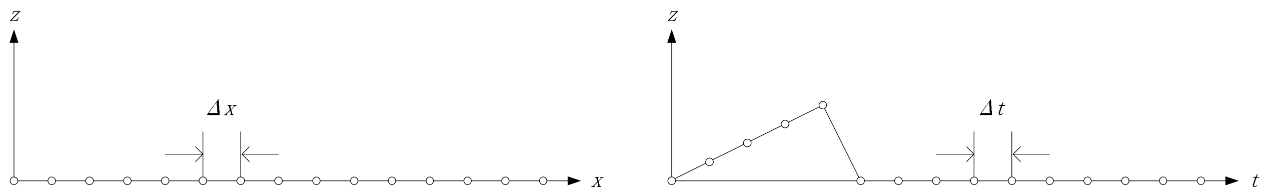
今回は波動について学び、また、波動方程式を差分化したものをシミュレーションすることで水面の波動をリアルタイムに実現すること目的とする。

1. １次元波動

細い紐や弦などで作られる振動は 1 次元の波動として表現できる。ここでは 1 次元波動を用いて、波の定式化と基本的な性質を学ぶ。

1.1 波の数式表現

図 1.1(a)に示すように 1 次元上に Δx 間隔で質点が並んでいるものとする。これを初期状態とし、左端（$x=0$）の質点が、図 1.1(b)に示すように Δt 間隔で変動していくことを考える。



(a) 初期状態　　(b) 左端（$x=0$）の質点の変動

図 1.1　波の伝搬について

バネー質点系モデルでは左端の質点を持ち上げたとすると、その右隣の質点は上方向だけでなく、左側へも引っ張られてしまう。今、質点は上下方向だけに移動し、水平方向には移動できないと仮定する。また、各質点は左隣の質点の動きを Δt 秒遅れてまねをするものとした場合、時間が経過すると、図 1.2 のような変化を示すことになる。

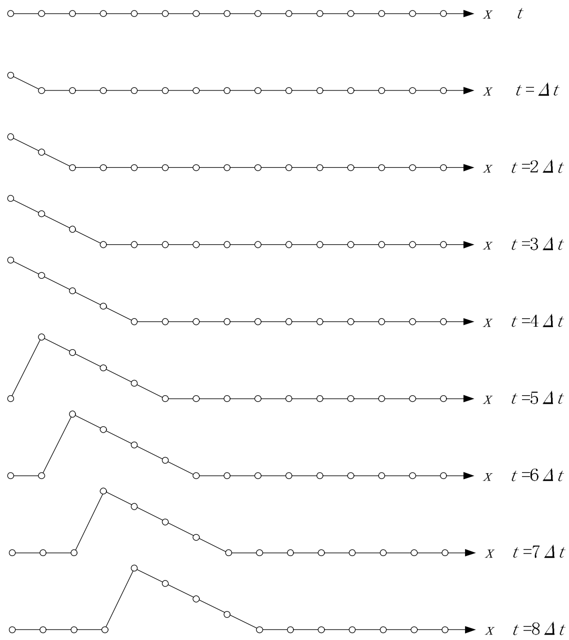


図 1.2　各質点変位の時間経過

ここで、図 1.1(b)の波源（$x=0$）の質点の変位を以下の式で表すものとする。

$$z = a(t) \tag{1.1}$$

また、位置は以下の式で表すものとする。

$$x = n\Delta x \tag{1.2}$$

位置 x に存在する質点の変位は $n\Delta t$ 前の波源の変位に一致するため、以下の式で表せる。

$$z(x,t) = a(t - n\Delta t) \tag{1.3}$$

式(1.2)から n を求め、式(1.3)に代入すると、

$$z(x,t) = a\left(t - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)x\right) \tag{1.4}$$

となる。ここで、質点の変位は Δt の間に Δx 進むことになるので、

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.5}$$

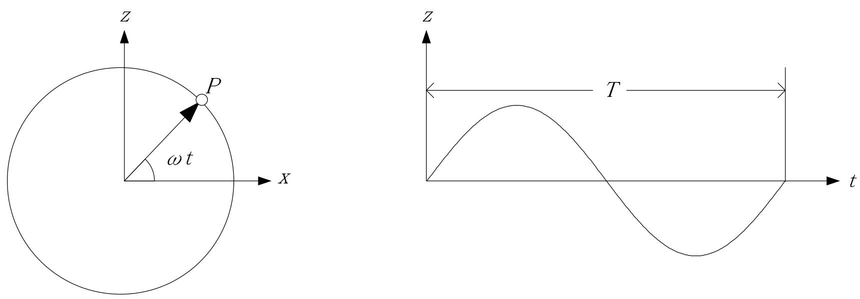
は波の伝わる速さ、すなわち、伝搬速度（propagation velocity）を表す。この v を用いると式(1.4)は以下の式で表すことができる。

$$z(x,t) = a\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{1.6}$$

1.2 正弦波

　最も単純な振動は単振動（simple harmonic motion）である。図 1.3(a)に示すように単振動は等速円

運動する質点の z 軸への射影として得られる。



(a) 等速円運動している質点　　(b) z 軸射影のグラフ

図 1.3　単振動と正弦波

半径を A 、各速度を ω 、初期位置を x 軸上にとると、時刻 t 秒後の質点の射影位置（変位）は以下の式で表すことができる。

$$z = A\sin(\omega t) \tag{1.7}$$

ωt を位相角（phase angle）、または単に位相（phase）という。これをグラフに示すと図 1.3(b)のようになり、振幅（amplitude）を A 、角振動数（angular frequency）を ω とする正弦波となる。ここで、振動数（frequency）を f 、周期（period）を T とすると

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.8}$$

の関係が成り立つ。

仮に、図 1.1(a)の左端が式(1.7)に従って単振動を 1 周期分行ったとすると、ある時刻における各質点の変位は図 1.4 のようになる。

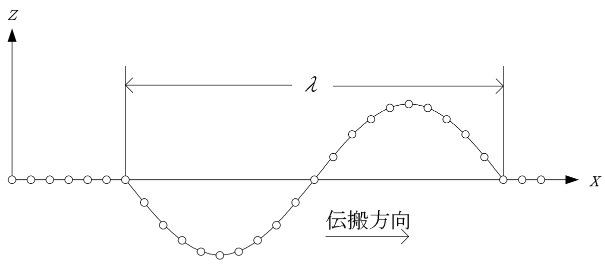


図 1.4　ある時刻における各質点の変位

λ は波長（wave length）である。この波形では (1.6)式と(1.7)式より、以下の式が得られる。

$$z(x,t) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \tag{1.9}$$

また、時間 T の間に距離 λ だけ進むことになるので λ/T は伝搬速度 v となる。

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{1.10}$$

(1.8)、(1.10)式を用いると、(1.9)式は以下の式で表すことができる。

$$z(x,t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \tag{1.11}$$

で与えられる。この場合の位相は以下である。

$$\theta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{1.12}$$

この波のように、進行方向に対して媒質が垂直に振動する波を横波（transverse wave）といい、進行方向と同じ方向に振動する波を縦波（longitudinal wave）という。縦波では媒質に疎な領域と密な領域が交互に入れ替わりながら伝わるため、疎密波ともいう。

1.3 進行波と反射波

図 1.1(a)で表される 1 次元モデルにおいて、x 方向への長さが無限であるとするならば、波源の振動によって発生した波は波源から遠ざかる方向の波だけとなる。このような波を進行波（traveling wave）という。また、長さが有限であるならば、その終端で波が反射することで発生する反射波（reflective wave）が生じる。反射波は図 1.5 に示すように、終端をはさんで反対側に、もう 1 つの波源があると考えることができる。この波源を反射波源と呼ぶことにする。ただし、波源から終端までの距離と終端から反射波源までの距離は等しくなくてはならない。

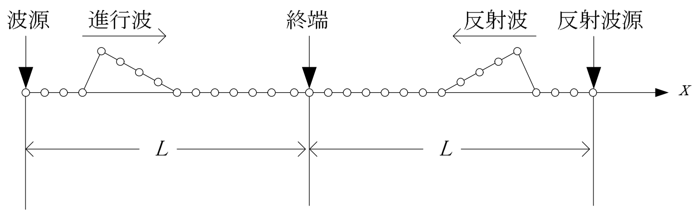


図 1.5　進行波と反射波（自由端）

1 次元モデルの長さを L 、波源位置を $x=0$ とすると反射波源の位置は $x_{rs}=2L$ となる。位置 x において、反射波源からの距離は $x_{rs}-x$ となるので反射波の変位は、(1.11)式を用いて、

$$z(x,t) = A_r\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{rs}-x}{\lambda}\right) + \theta_r\right) \tag{1.13}$$

となる。 A_r と θ_r はそれぞれ反射波の大きさと位相である。

2 個以上の波源がある場合の変位はそれぞれの波源によって生じる変位の単純な和になる。これを重ね合わせの原理（principle of superposition）という。進行波と反射波の合成波形は以下の式で表される。

$$z(x,t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) + A_r\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{rs}-x}{\lambda}\right) + \theta_r\right) \tag{1.14}$$

最も単純な反射波は終端を自由に動けるようにした場合と固定した場合である。前者を自由端、後者を固定端という。

自由端では終端において進行波と反射波が同じ位相で重なり合う。式(1.14)においては $\theta_r=0$ であり、$A=A_r$ とするならば、終端の変位は $2A$ となる。ここで、図 1.4 の右側の波形は自由端の反射の場合を示したものである。実際の例を挙げると、防波堤に打ち寄せる波に対して防波堤は自由端であると考えることができる。なぜなら、防波堤において水は固定されていないからである。

また、固定端では、終端の変位は常に 0 になるように進行波と反射波は逆位相で重なり合う。式(1.14)

においては$\theta_r = \pi$である。固定端のときは図1.6に示すように、右側の反射波の変位は負側に反転する。実際の例を挙げると弦楽器がこの場合にあたる。弦楽器の弦の両端は固定されているため、固定端での波である。

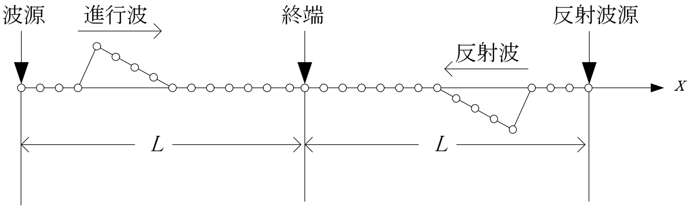


図 1.6　進行波と反射波（固定端）

1.4 定常波

波長と振幅が等しい正弦波が互いに連続で逆向きに進んでくると、2 つの波が重なり合い、どちらにも進んでいないように見える波ができる。これを定常波（standing wave）あるは定在波という。図 1.7 に示すように、ある場所では振幅が常に最大となり、ある場所では常に 0 となる。図 1.7 には振動の波長が弦の長さに一致している場合を示した。一般に定常波の波長は

$$\lambda = \frac{nL}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.15}$$

となる。

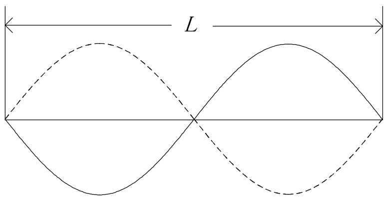


図 1.7　定常波

2. 波動方程式と格子点

2.1 波動方程式

実際の水面では上下運動だけでなく、前後にも運動している。水面上に浮かぶウキは円を描くかのように運動することになる。これは、もり上がった水面は、重力のために水平になろうとするため、液体自身の媒質が上下だけでなく、水平方向にも移動するために起こる。ここでは水面の波も横波だけであるものとして考える。つまり水平方向（xy 平面）の力は釣り合ったものとし、水面はz（垂直）方向にのみ振動するものとする。時間をtとすれば、時間と空間についての垂直位置は次の偏微分方程式で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \tag{2.1}$$

この偏微分方程式は波動方程式（wave equation）と呼ばれ、cは波が水面上を進む速度である。

2.2 格子点

波動方程式をコンピュータで解く場合、厳密解を求めることは難しく、水面の変位を空間および時間に関して連続的に表すことは一般的にできない。そのため、実際にはxy平面を一定間隔で区切り、有限個の格子点を用意する。そして、各格子点の変位を有限な時間Δt秒毎に求め、時間ごとに描かれた画像を次々に入れ替えることで水面のアニメーション表示を可能とする。格子は図 2.1 のように配置する。

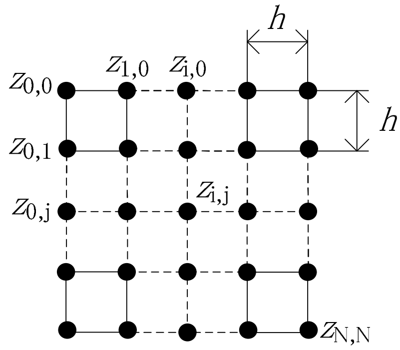


図 2.1 格子点

格子の x 方向の番号を i 、y 方向の番号を j 、現在時刻を t とすれば、格子点 (i,j) の時間 t における変位は $z_{i,j}^{n}$ で表される。

2.3 波動方程式の差分化と格子点との対応

(2.1)式で示した波動方程式を中心差分で近似すると次のようになる。

$$\frac{z_{i,j}^{n+1} - 2z_{i,j}^{n} + z_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{z_{i+1,j}^{n} + z_{i-1,j}^{n} + z_{i,j+1}^{n} + z_{i,j-1}^{n} - 4z_{i,j}^{n}}{h^2} \qquad (2.2)$$

$z_{i,j}^{n+1}$ 、$z_{i,j}^{n-1}$ はそれぞれ、格子点 (i,j) の時刻 $t+\Delta t$ 、$t-\Delta t$ の変位である。(2.2)式において、$z_{i,j}^{n+1}$ について解くと、

$$z_{i,j}^{n+1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2}\left(z_{i+1,j}^{n} + z_{i-1,j}^{n} + z_{i,j+1}^{n} + z_{i,j-1}^{n}\right) + \left(2 - \frac{4c^2 \Delta t^2}{h^2}\right) z_{i,j}^{n} - z_{i,j}^{n-1} \qquad (2.3)$$

が得られる。h は格子の間隔であり、定数である。c 、Δt も一定とすれば定数扱いとなる。この式はある時刻のある点の変位 $z_{i,j}^{n+1}$ は、それよりも過去の時刻のその点の変位（$z_{i,j}^{n}$ 、$z_{i,j}^{n-1}$）、および最近傍の点の変位（$z_{i+1,j}^{n}$ 、$z_{i-1,j}^{n}$ 、$z_{i,j+1}^{n}$ 、$z_{i,j-1}^{n}$）にのみ影響を受けて導くことができるということを意味する。さらに、求めた $z_{i,j}^{n+1}$ の値を利用することで新たに $z_{i,j}^{n+2}$ を導くことができる。これを繰り返すことで、次の時刻の変位を求める続けることができるので、変位の数値を繰り返し求めながら、同時にこのデータを利用して水面を描くことで水面のリアルタイムアニメーションが可能となる。

課題３の続き
(2.3) 式を元に、差分法で近似した 2 次元波動方程式のシミュレーションを行いなさい。シミュレーションは自由端で行うものとする。

参考文献
　この文章は以下の文献、ウェブサイトを参考にした。
1. OpenGL で作る力学アニメーション入門　酒井幸市 著　森北出版株式会社 : 第 9 章　波動シミュレーションについて、参考にした。
2. Game Programming Gems　ボーンデジタル : 波動方程式とその差分化について参考にした。
3. 流体と音波　Paul G. Hewitt 著　共立出版株式会社 : 2 章　振動と波動の定義について参考にした。
4. http://202.250.123.44/default.html　物理教育　徐丙鉄（近畿大学工学部・情報システム工学科）: 振動論入門の項目が参考となった。Java を使ったアニメーションもある。